In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful













CHAPITRE II : Les systèmes de numérotation

1-Comment comptons nous en décimal ?

- Pour bien comprendre comment on compte dans les autres bases, il est indispensable de revoir comment est fait notre système décimal.
- En effet, tout le monde sait compter en base 10. Mais comment fonctionne notre mode comptage réellement ? Comment est construit notre système de nombres ? Pour répondre à cela, oublions tout et reprenons depuis le début : comment avez vous appris à compter à l'école ?
- Certains diront que notre base 10 est venue du fait que nous avons 10 doigts, mais ce qui est sûr c'est qu'il en découle principalement deux choses :
- Il existe **10 chiffres** : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
- Avec ces chiffres ont peut compter jusqu'à 9. (La plus haute valeur des chiffres.)

1-Comment comptons nous en décimal ?

- Pour aller au delà de 9 il faut **changer de rang**.
Ça veut dire que si le rang des unités est plein, on commence le rang des dizaines et on remet les unités à zéro. Ensuite, on re-complète le rang des unités jusqu'à ce qu'il soit de nouveau plein. Puis on ajoutera une dizaine et les unités seront de nouveau remis à 0, et ainsi de suite.
- Par exemple, arrivé à 19, le rang des unités est plein. On ajoute donc une dizaine et on remet à zéro le rang des unités : on arrive donc à 20.

1-Comment comptons nous en décimal ?

- On voit que une centaine vaut 10 dizaines et que une dizaines vaut 10 unités. Plus mathématiquement, **un rang est égale au précédent multiplié 10**.
  On peut dire que chaque rang est à une puissance de 10 supérieur au précédent.
- De cette manière, le nombre 56 = 50 + 6 mais que l'on peut aussi écrire $56 = 5\times10^1 + 6\times10^0$.
- **Ce qu'on vient de faire, c'est décomposer 56 en puissances de 10 (unités, dizaines, centaines…).**

1-Comment comptons nous en décimal ?

- On peut décomposer chaque nombre en puissances de 10 successives. Par exemple, $3506 = 3\times10^3 + 5\times10^2 + 6\times10^0$.
- Avec cette explication, vous devez avoir compris qu'en base 10 :
  - On change de rang dès que la précédente est à 9.
  - On peut décomposer tous les nombres en puissance de 10.
  - Si on décompose un nombre en puissances de 10, c'est parce que 10 est notre base. Ceci est important, car en base 2, il faudra décomposer en puissances de… Deux !

2- Le binaire

1 – Présentation :

- Le binaire est le mode de comptage non plus en base 10 mais **en base 2**. Il est utilisé par les ordinateurs, car les machines ne peuvent comparer que deux valeurs : des 1 et des 0.
- Je vous avais parlé des rangs (unités, dizaines, centaines…), et bien sachez qu'en binaire on emploie le mot « bit » (contraction de « binary-digit », signifiant simplement « rang binaire »).

  Par exemple, le nombre en base 2 « 10011 » s'étale sur 5 bit.

2- Le binaire

1 – Présentation :

Là où cela se complique, c'est qu'en binaire **chaque rang ne peut prendre que deux valeurs** (il pouvait en prendre dix en décimal). Donc, dès que le rang atteint sa deuxième – la plus haute – valeur on change de rang. **En binaire, un rang commence à 0 et se termine à 1.**

Bon, pour commencer et tenter d'y voir un peu plus clair, on va compter en binaire jusqu'à dix :

l suffit d'appliquer une règle : entamer le rang suivant quand celui en cours est plein!

2- Le binaire

1 – Présentation :

Valeur en décimal	Équivalent en binaire	Explication
00	0000	logique !
01	0001	simple !
02	0010	Le premier rang a atteint le maximum autorisé ! Qu'à cela ne tienne, on passe au rang suivant. On met le second à 1 et on remet le premier à 0.
03	0011	On re-remplit le rang 1.
04	0100	Le rang 1 est plein, mais le 2 aussi ! On passe donc au troisième et on remet les précédents à 0 (comme on le fait lorsque l'on passe de 0999 à 1000, par exemple).
05	0101	On procède de même.
06	0110	
07	0111	
08	1000	On entame le quatrième rang.
09	1001	On recommence au premier…
10	1010	On rempli les rangs.

2- Le binaire

1 – Présentation :

Bon, pour compter jusqu'à 10 ou même 20, cela va encore de remplir ce tableau, mais si je vous demande de convertir 450 en binaire ? Vous n'allez pas monter un par un, si ?

Dans ce qui suit, on va voir une technique générale.

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

A- Méthode 1 : les puissances de 2

- Pour y arriver, on doit décomposer notre nombre en puissances de 2. C'est le même principe que la décomposition en puissances de dix, sauf que l'on ne décompose pas en milliers, centaines et dizaines, mais en puissances de deux ; qui sont : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 …, 512, 1024, etc (une valeur est égale à la précédente multipliée par 2).
- Ainsi, si l'on prend l'exemple du nombre 26, on obtient la décomposition suivante : 26 = 16 + 8 + 2. Il suffit ensuite de remplacer ces nombres par les puissances :

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

A- Méthode 1 : les puissances de 2

- 26= 16 + 8 + 2
- 26= **1**×16 + **1**×8 + **1**×2
- 26= **1**×2^4 + **1**×2^3 + **1**×2^1 (on écrit les coef sous forme de puissances de 2)
- 26= **1**×2^4 + **1**×2^3 + **0**×2^2 + **1**×2^1 + **0**×2^0 (on ajoute les puissances de 2 qui manquent)
- 26= **1**×2^4 + **1**×2^3 + **0**×2^2 + **1**×2^1 + **0**×2^0 (voyez les puissances de 2 qui sont toutes là)
- 26= 1×2^4 + 1×2^3 + 0×2^2 + 1×2^1 + 0×2^0 (en orange : notre nombre en binaire !)

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

A- Méthode 1 : les puissances de 2

- **Il est important de ne pas oublier les puissances dont les coefficients sont zéro.**

Finalement, pour obtenir le nombre 26 en binaire, il suffit de mettre les coefficients qui sont devant les puissances de 2 à la suite. On obtient : 11010.

- **On écrit : $(26)_{10} = (11010)_2$**

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

A- Méthode 1 : les puissances de 2

- **Je récapitule la méthode :**
  - **On a notre nombre en décimal.**
  - **On le décompose en valeurs de puissances de 2**
  - **Si certaines puissances manquent, on les rajoutent en mettant 0 devant.**
  - **On lit les coefficients devant les puissances de 2, ce sera notre nombre en binaire !**
  - **Par commodité, d'écriture, on regroupe les chiffres par 4. (par ex : 101010101 se notera 1 0101 0101). On verra pourquoi plus loin.**

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

B- Méthode 2 : les divisions euclidiennes par 2

Tout aussi simple à comprendre. Cette méthode est mieux pour des grands nombres et est plus facile à utiliser en programmation , voilà comment on fait :

- On a notre nombre en décimal.
- On le divise par 2 et on note le reste de la division (c'est soit un 1 soit un 0).
- On refait la même chose avec le quotient précédent, et on met de nouveau le reste de coté.
- On re-itère la division, et ce jusqu'à ce que le quotient est 0.
- Le nombre en binaire apparaît : le premier à placer est le dernier reste non nul. Ensuite, on remonte en plaçant les restes que l'on avait. On les place à droite du premier 1.

2- Le binaire

2 – Conversion du décimal en binaire :

B- Méthode 2 : les divisions euclidiennes par 2

Exemple : Notre nombre est 164 (A ÷ B = Quotient + reste)

- 164 ÷ 2 = 82 + 0
- 82 ÷ 2 = 41 + 0
- 41 ÷ 2 = 20 + 1
- 20 ÷ 2 = 10 + 0
- 10 ÷ 2 = 5 + 0
- 5 ÷ 2 = 2 + 1
- 2 ÷ 2 = 1 + 0
- 1 ÷ 2 = **0** + 1

On voit apparaître notre nombre binaire en rouge : **il faut le lire de bas en haut**, ce qui donne 1010 0100.

Et donc on écrit : $\mathbf{(164)_{10} = (1010\ 0100)_2}$

2- Le binaire

3 – Conversion du Binaire en Décimal :

Dans l'autre sens maintenant : convertir un nombre en base 2 en un nombre en base 10.

Prenons le nombre (au hasard) : 101 0110. On voit qu'il s'étale sur 7 rangs, et sait que chaque rang correspond à une puissance de 2 : le premier (en partant de la **droite**) est le rang 0, le second est le rang 1, etc.

Pour le convertir en décimal, on procède de la manière suivante : on multiplie par 2^0 la valeur du rang 0, par 2^1 la valeur du rang 1, par 2^2 la valeur du rang 2, [...], par 2^{10} la valeur du rang 10, etc.

2- Le binaire

3 – Conversion du Binaire en Décimal :

Pour notre nombre 101 0110, on a donc $0\times2^0 + 1\times2^1 + 1\times2^2 + 0\times2^3 + 1\times2^4 + 0\times2^5 + 1\times2^6$.

Ensuite, il suffit simplement de remplacer les puissances de 2 par leurs valeurs et de faire la somme : $0\times1 + 1\times2 + 1\times4 + 0\times8 + 1\times16 + 0\times32 + 1\times64 = 86$.

donc : $(101\ 0110)_2 = (86)_{10}$

3- l'Hexadécimal

1 – Présentation:

- Après le binaire, voici venu une autre base : **le système hexadécimal** qui travaille en base 16.
- Si vous avez suivi jusqu'ici, vous devinerez qu'il faudra 16 caractères différents pour représenter chacune des 16 valeurs.

  C'est alors qu'avec une originalité déroutante, en hexadécimal, les caractères sont 0, 1, 2 etc. jusqu'à 9 ainsi que A, B, C, D, E et F.

  Vous l'aurez compris : A en hexadécimal vaut 10 en décimal, B vaut 11, … et F vaut 15.
- En hexadécimal, le changement de rang se fait donc à F. Ainsi E+1 = F et F+1 = 10 (dire "un-zéro").

  Plus compliqué : F+B = 1A.

3- l'Hexadécimal

2 – Conversion du décimal en Hexadécimal:

- La conversion d'un nombre de la base 10 en base 16 est aussi "facile" qu'avec le binaire. Pour le binaire il fallait décomposer en puissances de 2, ici on décompose en puissances de 16.

  je vous donne les premiers :
- $16^0 = 1$
- $16^1 = 16$
- $16^2 = 256$
- $16^3 = 4096$
- $16^4 = 65536$

3- l'Hexadécimal

2 – Conversion du décimal en Hexadécimal:

- Pour l'exemple, je prendrais le nombre 1680. Il faut donc commencer par le décomposer en puissances de 16 :
  $1680 = 6\times256 + 9\times16 + 0\times1$
  $1680 = 6\times16^2 + 9\times16^1 + 0\times16^0.$
  La conversion en hexadécimal de 1680 est donc 690 (lire "six-neuf-zéro").
- Un autre exemple : convertissons 2009 en hexadécimal :
  $2009 = 7\times16^2 + 13\times16^1 + 9\times16^0.$
  Le nombre en base 16 correspondant à 2009 est donc 7D9 (rappelez vous, chaque rang peut monter jusqu'à 15 en base 16, et le D vaut 13).

3- l'Hexadécimal

3 – Conversion du Hexadécimal en décimal :

- Dans ce sens, c'est plus simple : prenons un nombre : 4F2C. Il a 4 rangs : chaque rang est une puissance de 16 : pour convertir, on multiplie le premier rang (en partant de la droite) par 16^0, le second par 16^1, etc.
- Ainsi on obtient :
  $4F2C = 4\times16^3 + F\times16^2 + 2\times16^1 + C\times16^0$
  $4F2C = 4\times16^3 + 15\times16^2 + 2\times16^1 + 12\times16^0$
  $4F2C = 4\times4096 + 15\times256 + 2\times16 + 12\times1$
  $(4F2C)_{16} = (20\ 268)_{10}$
- C'est simple non ? Il suffit de prendre les puissances de 16 croissantes.

3- l'Hexadécimal

4 – Conversion du Binaire en Hexadécimal :

- Prenons un nombre en binaire : 101 0011 1011.
- Notez que je l'ai séparé en blocs de 4 chiffres (comme on sépare les nombres en bloc de 3. Par exemple, 30000 s'écrit 30 000).
- Ceci nous simplifie la tache : en effet, on sait que 4 rangs binaires permettent de monter jusqu'à 15. Et bien, 1 rang en hexadécimal aussi ! (Cela vient du fait que 2^4 (4 rangs en base 2) = 16^1 (1 rang en base 16)).
- De cette façon, **4 bits en binaire** seront représentés par **un rang en hexadécimal** !

3- l'Hexadécimal

4 – Conversion du Binaire en Hexadécimal :

- Ainsi, le premier quadruplet : 1011 deviendra un seul rang en hexadécimal :
  1011 = 11 en décimal = B en hexadécimal. Le second quadruplet 0011 devient 3 en hexadécimal ; et finalement le dernier : 101 (ou 0101) devient : 5.
- Ainsi, $(101\ 0011\ 1011)_2 = (53B)_{16}$.

3- l'Hexadécimal

5 – Conversion du Hexadécimal en Binaire :

- On va utiliser le même principe que ci-dessus, à savoir qu'un rang en base 16 correspond à 4 rangs en base 2.

  On convertira le nombre hexadécimal **BE57**. On prend chaque rang que l'on convertit individuellement en binaire :

- $(B)_{16} <=> (11)_{10} <=> (1011)_{2}$
- $(E)_{16} <=> (14)_{10} <=> (1110)_{2}$
- $(5)_{16} <=> (5)_{10} <=> (\mathbf{0}101)_{2}$
- $(7)_{16} <=> (7)_{10} <=> (\mathbf{0}111)_{2}$

Prenez bien soin de mettre 0101 au lieu de 101, car il ne faut pas se tromper quand on va mettre les quadruplets bout à bout.

$$(\mathbf{BE57})_{16} = (\mathbf{1011\ 1110\ 0101\ 0111})_{2}\ .$$

3- Opérations

1 – Additionner en binaire:

Additionner en binaire n'est pas compliqué : c'est le même principe que dans les autres bases. Il suffit de poser l'opération et de faire attention aux retenues. Après, il est aussi possible de convertir en base 10, de faire l'opération de tête, puis de revenir en base 2, mais c'est mieux de savoir faire l'opération directement en binaire.

donc en voici un : 2+2, soit $(10)_2+(10)_2$

```
  10      10      10
+ 10    +¹10    + 10
----    ----    ----
   0      00     100
```

3- Opérations

1 – Additionner en binaire:

Sur l'opération du milieu, 1+1 en binaire donne 10, donc 0 et une retenue.

Voici un autre exemple, avec des nombres un peu plus grands. La difficulté n'est pas plus grande, mais il faut parfois faire attention aux retenues qui se propagent : 22+2, donc 10110+10.

```
            1        11        11        11
  10110     10110     10110     10110     10110
+    10   +    10   +    10   +    10   +    10
-------   -------   -------   -------   -------
      0        00       000      1000     11000
```

3- Opérations

2 – Soustraire en binaire:

- Là encore, il faut raisonner comme on raisonne à la petite école : en posant l'opération. Ça se fait tout seul, il suffit de bien faire attention aux retenues.
  Mais je vais vous apprendre une autre méthode, qui transforme les soustractions en additions, et simplifie alors toute cette histoire de retenues.
- En fait, au lieu de faire A – B, on fera A + ($\overline{B}$+ 1).
  Ici, $\overline{B}$ (prononcer « B barre ») est le complément à 1 de B.

3- Opérations

2 – Soustraire en binaire:

A - complément à 1 :

Le complément à 1 est un nombre qui existe dans toutes les bases, mais en binaire il est très facile à trouver : il suffit de changer les 1 en 0 et les 0 en 1. C'est tout :

Nombre (B)	Complément $(\overline{B})$
0	1
1	0
1010	0101

3- Opérations

2 – Soustraire en binaire:

B – Soustraire :

Maintenant qu'on a le complément à 1 d'un nombre, il est possible de faire des soustractions.

Souvenez-vous de ce qu'il faut faire : au lieu A – B, on fera

$A + (\overline{B} + 1)$.

Exemple : calculons 101010 – 1010.

3- Opérations

2 – Soustraire en binaire:

B – Soustraire : 101010 – 1010

- Premièrement, il faut commencent à donner le même nombre de rangs à chaque terme : le premier nombre s'écrit sur 6 bit et le second seulement sur 4. Il font donc écrire le second sur 6bit aussi : 1010 devient 001010. C'est de ce nombre qu'il faudra inverser tous les bits.
  - On écrit le plus petit nombre avec autant de bits que le grand : 1010 devient 001010.
  - En inversant tous les bit de 001010 on obtient 110101.
  - On ajoute 1, ce qui fait 110110.
  - On fait maintenant 101010 + 110110. Cela donne : 1100000.
  - En remarquant que la différence de deux nombre positifs ne peut pas être supérieure au plus grand des deux nombres, il est facile de conclure que le résultat doit être plus petit que 101010. Pour cela, on supprime de premier bit.
    Donc 1100000 devient 100000.
  - 100000 est le résultat de notre soustraction.

3- Opérations

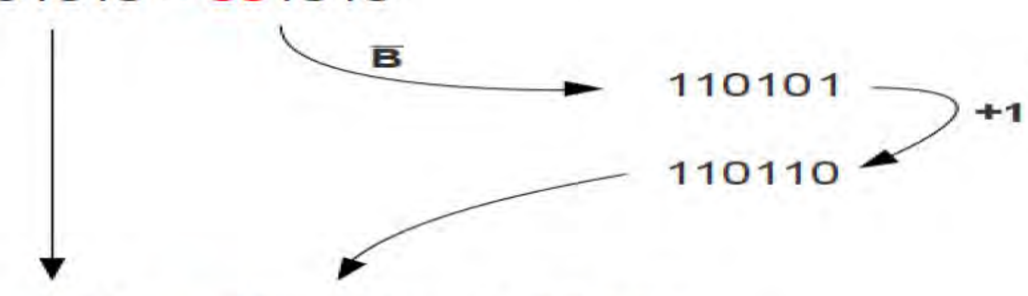
2 – Soustraire en binaire:

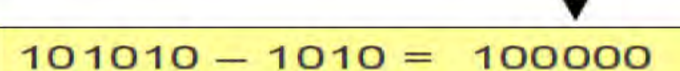
B – Soustraire : 101010 – 1010

$(101010)_2 - (1010)_2 = (100000)_2$

$(42)_{10} - (10)_{10} = (32)_{10}$

Je pense que c'est plus simple avec ce diagramme :





4- Conclusion

Voilà : vous avez la méthode pour convertir des nombres entiers entre les bases 2, 10 et 16.

On peut utiliser toutes les bases que l'on souhaite : vous voulez une base 3 ? C'est possible. Une base 595 ? Aussi !

On peut transposer chaque nombre (entier) dans n'importe quel base. (sauf la base 1)

Merci et bon courage.